

Speciális relativitáselmélet

„Ami fontos, az abszolút.”

Vonatkoztatási rendszer

- A fizikai mennyiségek értéke, iránya majdnem mindig attól függ, hogy honnan nézzük, vagyis függenek a vonatkoztatási rendszertől.
- Ez anyagi test, amelyhez három egymásra merőleges tengelyt képzelünk illesztve (koordinátarendszer). A vonatkoztatási rendszerben határozzuk meg, hogy a testek az idő függvényében hol tartózkodnak, hogyan mozognak.

A távolság mérése

- Két pont közötti távolságot (egy szakasz hosszát) beosztásokkal ellátott merev rúddal mérjük. (Jó kérdés: mi jelent az, hogy a rúd merev?)
- A távolság egysége: a Föld kerületének 40 milliommód része, ez 1 méter.
- Kérdés: hogyan mérjük meg egy mozgó szakasz hosszát álló mérőeszközzel?

Az idő mérése - 1

- Alapja: választunk egy mozgást, amelyet egyenletesnek tekintünk, egyenletesnek posztulálunk, (ókorban a Nap mozgása az égen, a lepergő homok, az inga, az atomok rezgése). Ehhez viszonyítjuk más mozgások egyenletességét.
- Mi az időmérés eszközeül a Föld tengely körüli forgását választottuk.
- Egység (mi ezt választottuk): a Föld tengely körüli forgásának 24-szer 3600-ad része. Ez 1 másodperc.

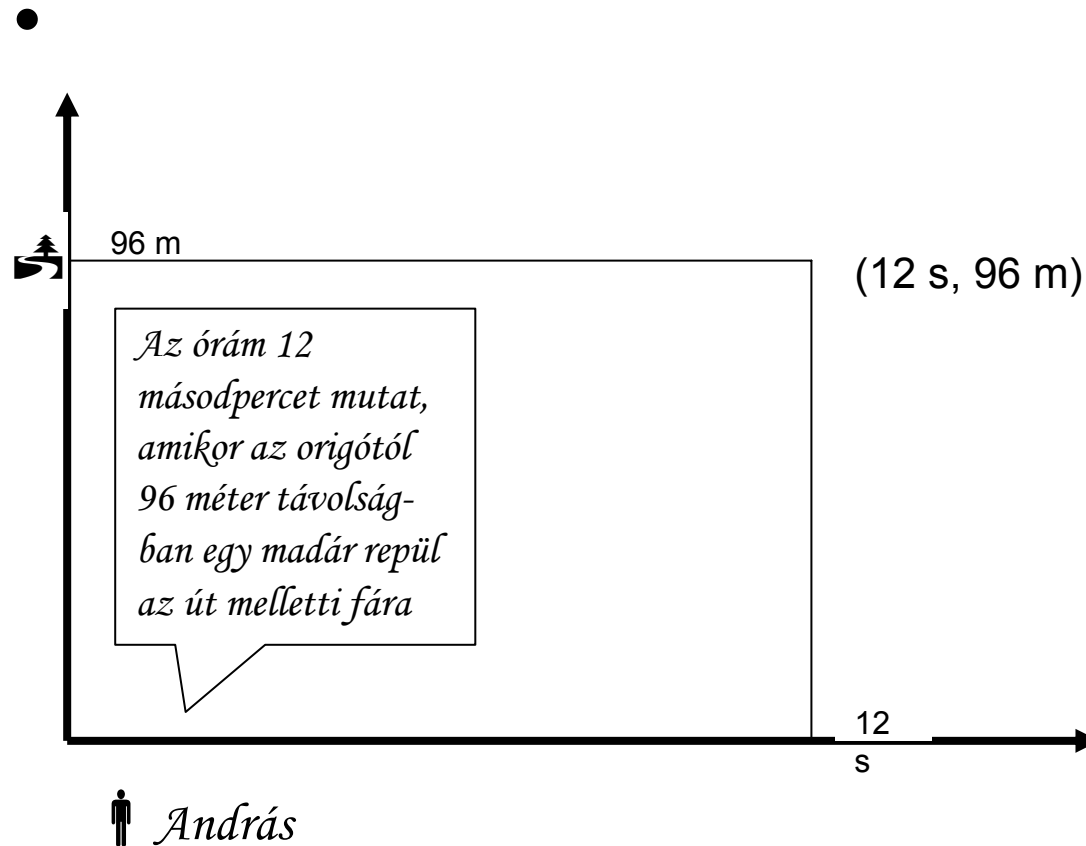
Az idő mérése - 2

- Tekintheznénk az időmérés alapjának az elejtett kis-méretű testek mozgását? Igen, de a fizika törvényei nagyon bonyolultak lennének.
- A természettudományokban minden mérés vagy távolságmérés vagy számlálás. Az analóg idő-mérés is távolságmérés.
- Különböző vonatkoztatási rendszerekben külön-böző mozgást lehet az időmérés alapjának vá-lasztani.
- És egy adott vonatkoztatási rendszerben megoldható-e, hogy az órák együtt járjanak?

Az idő szinkronizálása

- Hogyan lehet elérni, hogy *egy vonatkoztatási rendszer különböző helyein az összes óra együtt járjon*? A tengerparti város ura eldönti, hogy a kikötőben *horgonyzó* hajókon pontosan akkor legyen dél, amikor a saját óráján. Hogyan lehet ezt megoldani?
- Hogyan lehet elérni, hogy a kikötőben *mozgó* hajók óráit a világítótorony órájához igazítani? Ez nagyon nehéz... Erről lesz szó.

Téridő - rendszeridő

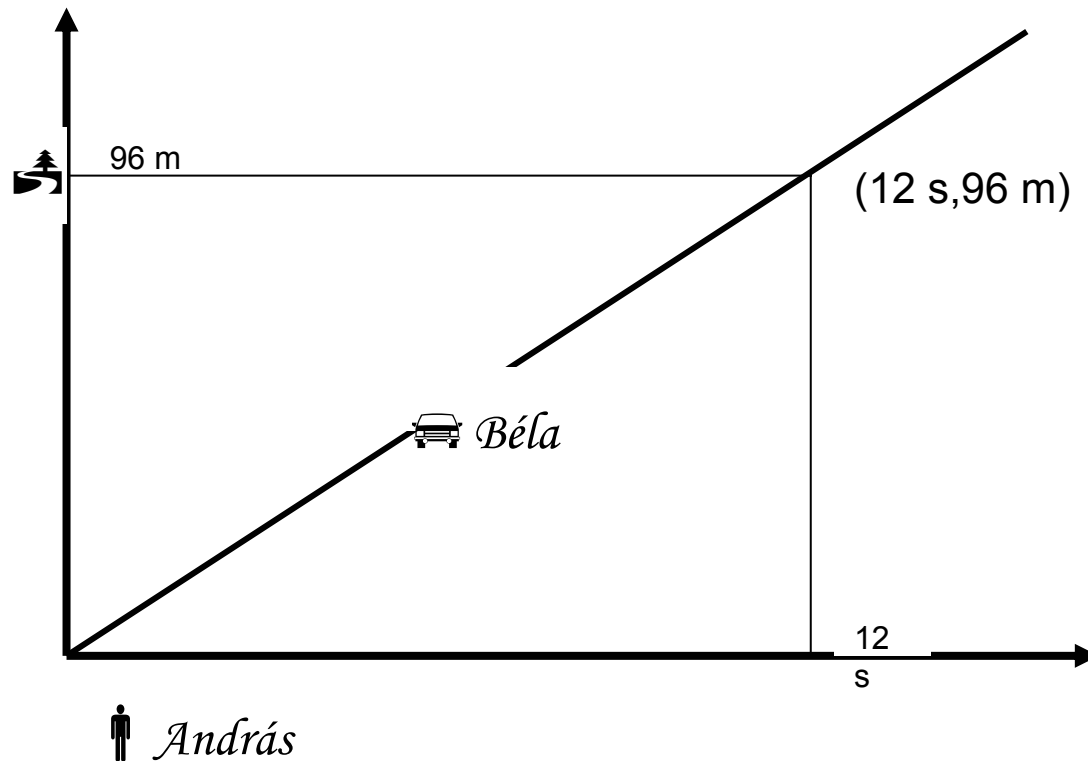


Új szereplő lép színre

- Egy autó a 0 s időpontban elhalad az origó mellett, sebessége $96 \text{ m}/12 \text{ s} = 8 \text{ m/s}$. Az autós éppen akkor halad el a fa mellett, amikor a madár leszáll a fára. Ez azt jelenti, hogy András az origóban azt tapasztalja, hogy az órája 12 másodpercet mutat, amikor az autó már 96 méter távolságra távolodott. Az autó grafikonja (világvonala) illeszkedik a (12 s, 96 m) pontra.

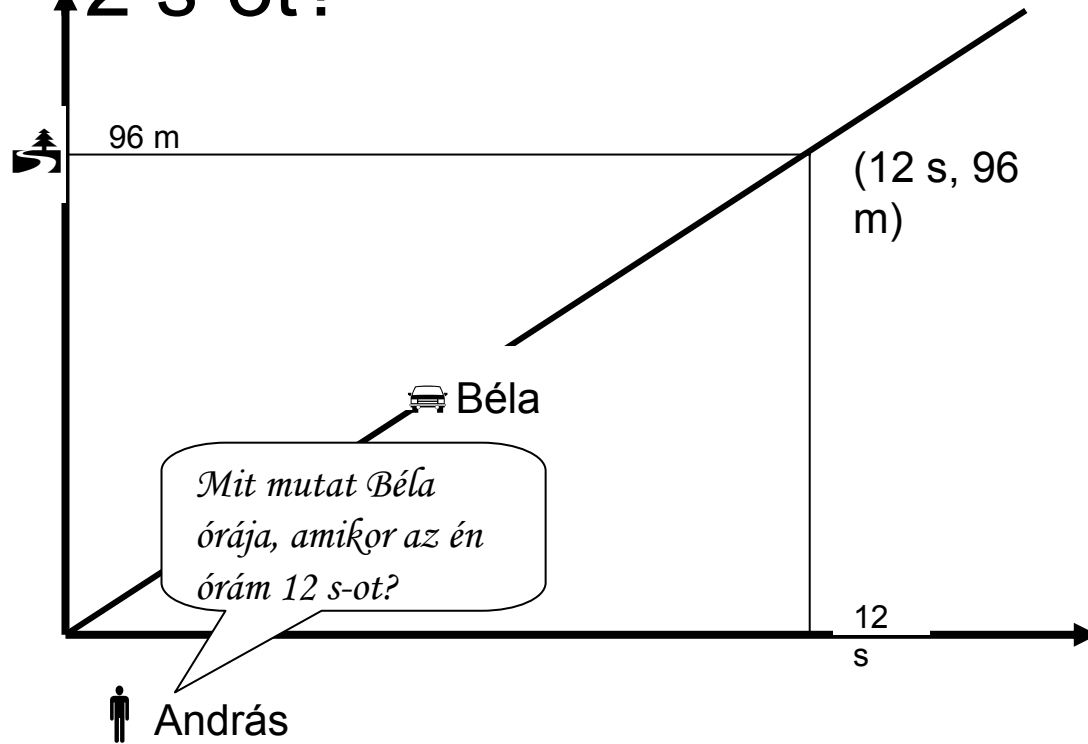
Az autó „világvonala”, grafikonja

- A világvonal áthalad a (12 s, 96 m) ponton

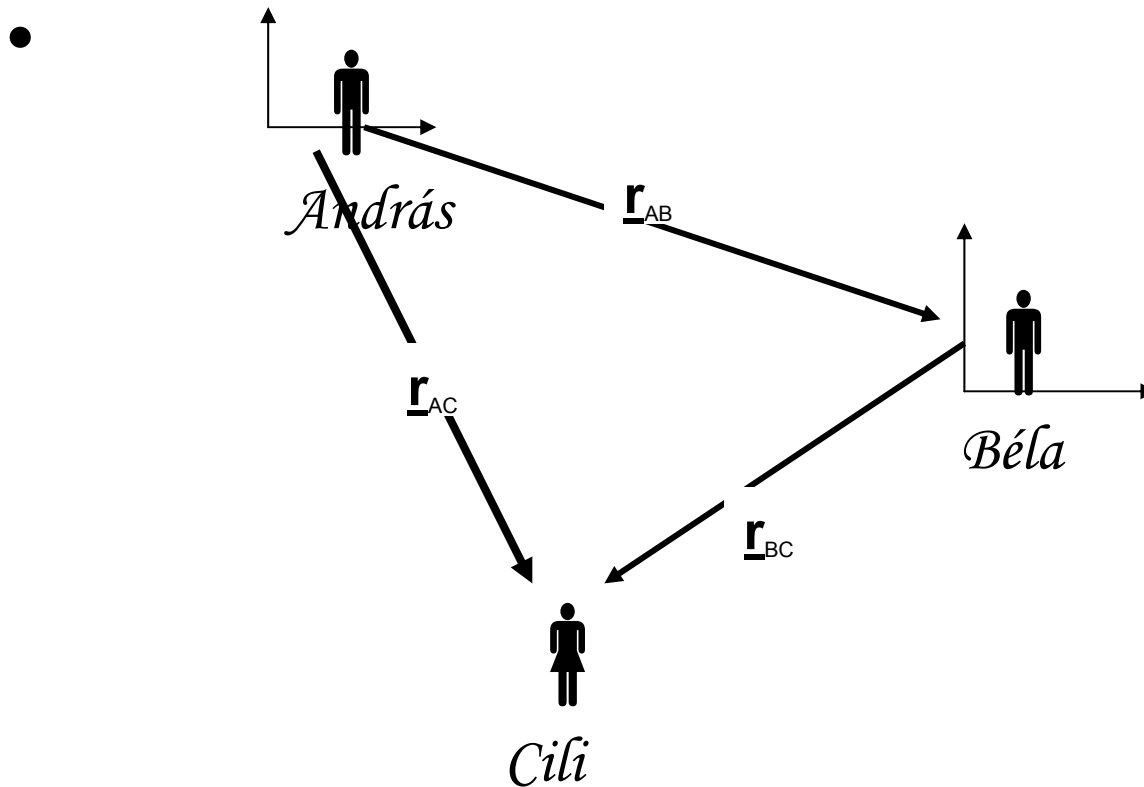


A nagy kérdés:

- „Mit mutat Béla órája, amikor az én óráim 12 s-ot?”



Két fiú szemez egy lánnyal



Sebességösszeadás

$$\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} = \mathbf{r}_{AC}$$

$$\Delta\mathbf{r}_{AB} + \Delta\mathbf{r}_{BC} = \Delta\mathbf{r}_{AC} | : \Delta t$$

$$\frac{\Delta\mathbf{r}_{AB}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{r}_{BC}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{r}_{AC}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BC} = \mathbf{v}_{AC}$$

Mi volt a hallgatólagos feltevés?

$$\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} = \mathbf{r}_{AC}$$

$$\Delta\mathbf{r}_{AB} + \Delta\mathbf{r}_{BC} = \Delta\mathbf{r}_{AC}$$

$$\frac{\Delta\mathbf{r}_{AB}}{\Delta t_A} + \frac{\Delta\mathbf{r}_{BC}}{\Delta t_B} \stackrel{?}{=} \frac{\Delta\mathbf{r}_{AC}}{\Delta t_A}$$

?

$$\mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BC} = \mathbf{v}_{AC}$$

A sebesség összeadása

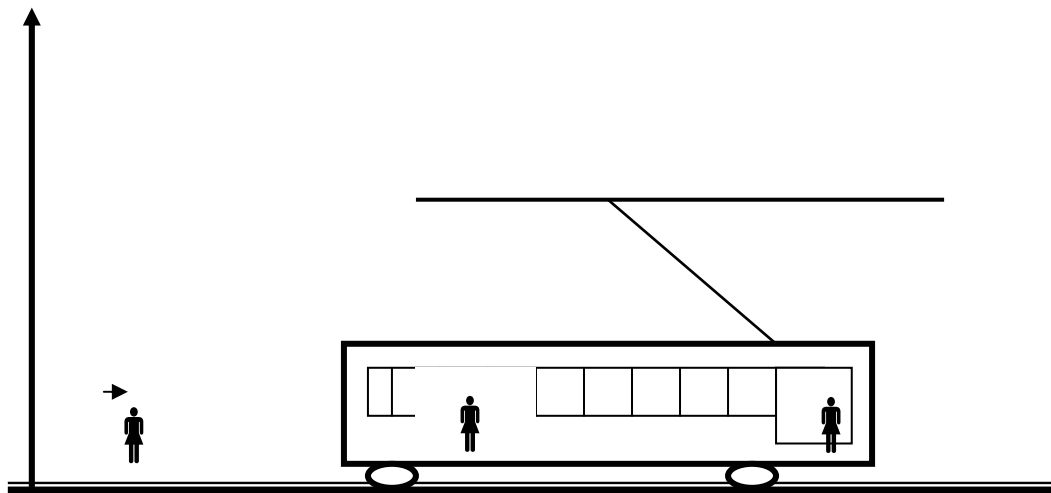
- A sebesség-összeadás szabálya akkor és csak akkor érvényes, ha a világban egységes az idő. (Ez most még nyitott kérdés.)
- Az egységes idő feltételezése azt jelenti, hogy a világban minden óra együtt jár, tehát a szinkronizálás nem jelent problémát, és a sebességek összeadódnak.

Három feltétel

- A következő három feltétel ekvivalens:
 1. A sebesség „lineárisan” összeadódik
 2. Egységes idő az Univerzumban
 3. A mozgó órák együtt járnak az álló órákkal, (a kikötőben mozgó hajók órái is szinkronizálhatók a világítótoronyban járó órához).

Ha nem járnak együtt az órák

- Három szereplő: rendőr az úton, a villamos-vezető és az utas



Számoljunk...

- Tegyük fel, hogy a villamos hossza 12 m. Az utas végighalad a villamos végétől a villamos-vezetőig. Ez a villamosvezető órája szerint 3 s-ot vesz igénybe. Ugyanennek a időszaknak a hosszát a rendőr az út mellett 4 s hosszúnak találja. A rendőr azt is megállapítja, hogy a villamos közben elmozdul 8 m-t. Ekkor az utas 20 métert mozdul el (a rendőr szerint, és egyenlőre fogadjuk ezt el).

... a sebességösszeadás nem teljesül.

- A villamos sebessége a rendőrhöz képest: $8/4$ m/s, az utas sebessége a villamosvezetőhöz képest $12/3$ m/s, az utas sebessége a rendőrhöz képest $20/4$ m/s.
- $\mathbf{V}_{RV}=2$ m/s, $\mathbf{V}_{VU}=4$ m/s, $\mathbf{V}_{RU}=5$ m/s
- $\mathbf{V}_{RV} + \mathbf{V}_{VU} \neq \mathbf{V}_{RU}$, (2 m/s + 4 m/s \neq 5 m/s)

Most néhány szó a dinamikáról

- **Alapfogalmak:** az anyag és a mozgás mennyisége (tömeg, impulzus). Jele: m , I .

- $I = mv$

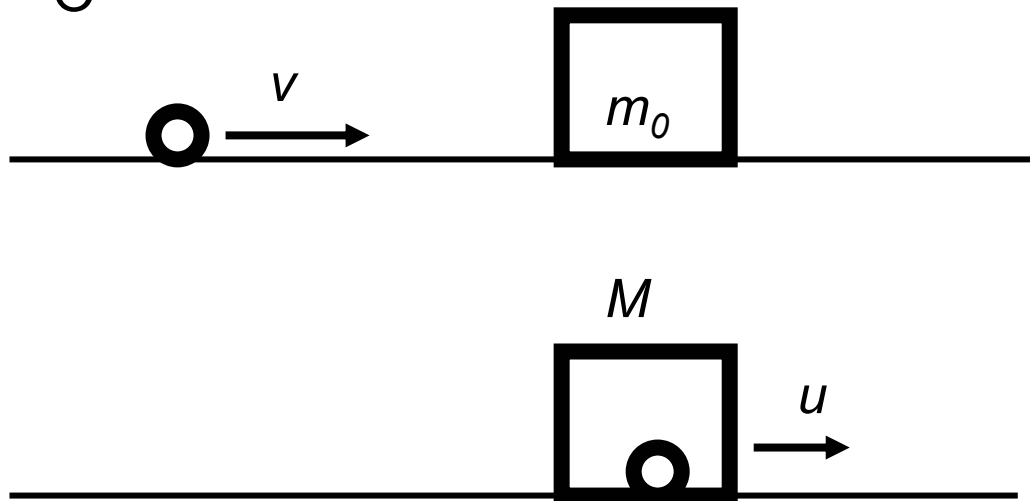
- **Alapelvek (axiómák)**

I. axióma: A kölcsönhatás nem változtatja meg az anyag mennyiségét (tömegmegmaradás törvénye, Empedoklész, Lomonoszov)

II. axióma: A kölcsönhatás nem változtatja meg a mozgás mennyiségét (impulzusmegmaradás törvénye, Buridan, Galilei, Newton)

Hogyan mérjük a tömeget?

- Legyen m_0 az egység, reprodukálható test tömege. Kérdés: hányszor van meg m -ben m_0 ?



-

	Ütközés előtt	Ütközés után
Anyag mennyisége (skalár)	$m + m_0$	M
Mozgás mennyisége (vektor)	mv	Mu

Az alapelvek alkalmazása

- Első alapelv: $m + m_0 = M$
- Második alapelv: $mv = Mu$
- A két egyenletből:

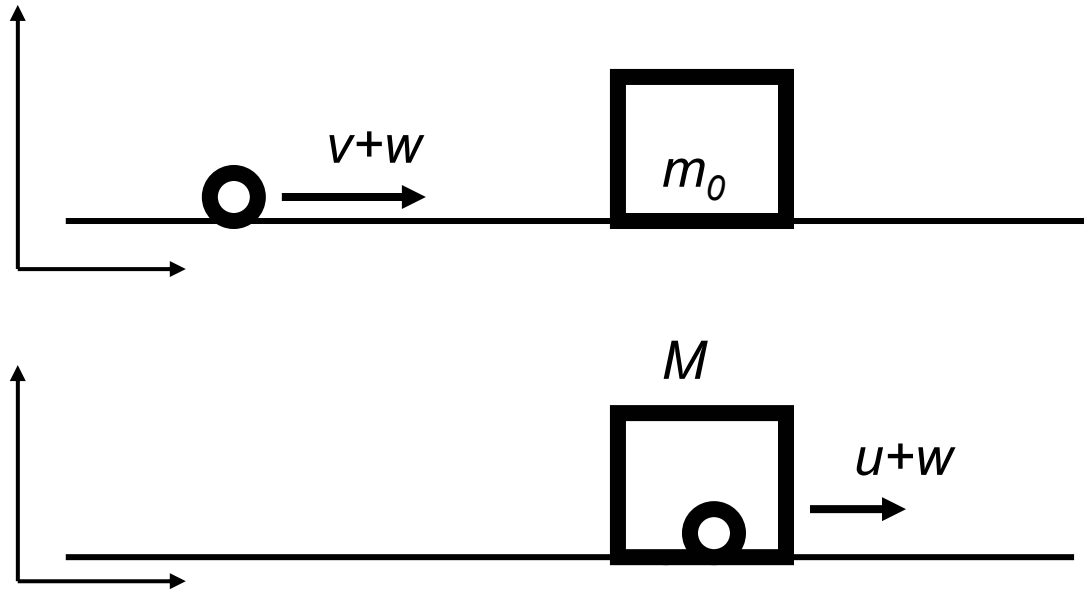
$$\frac{m}{m_0} = \frac{u}{v - u}$$

A tömeg mérése

- Az egyelőség jobb oldalán minden mennyiség mérhető méterrúddal és órával. A tömegmérést visszavezettük távolság- és időmérésre. Minden más mérés csak akkor fogadható el, ha nincs ellentmondásban a fenti méréssel.
- A tömeg egysége: 1 liter víz tömege, 1 kg.
- Impulzus: tömeg és sebességmérés alapján. Mértékegysége: kg m/s.

Függ-e a vonatkoztatási rendszertől?

- A talajhoz viszonyítva w -vel balra mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve:



-

	Ütközés előtt	Ütközés után
Anyag mennyisége	$m + m_0$	M
Mozgás mennyisége	$m(v + w)$	$M(u + w)$

Rövid számolás

- Innen

$$m(v + w) = (m + m_0)(u + w)$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{u}{v - u}$$

Eredmény:

- A tömeg mérőszáma minden vonatkoztatási rendszerből nézve azonos, abszolút mennyiség.
- Fontos: a tömeg két alapvető tulajdonsága:
 - (1) megmaradó (első alapelv)
 - (2) abszolút mennyiség.

Inerciarendszer

- IR: olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a magára hagyott testek mozgásmennyisége állandó (állnak vagy egyenletesen mozognak). IR: amelyben érvényben van a tehetetlenség elve.
- Van-e ilyen? Empirikus kérdés. Elvben semmi sem támasztja alá.
- Az IR-ek egyenértékűek: Galilei relativitási elve

Newton I. törvénye

- **Newton I.törvénye egy megállapodás: a dinamika törvényeit inercia-rendszerekhez viszonyítva írjuk le.**
- Newton I. törvénye nem törvény, hanem kiválasztási szabály (LANGE, Novobátczky). Hasonló a szerepe a KRESZ 1. §-hoz: rögzíti, hogy hol érvényes a többi.

Newton II. törvénye

- IR-ben egy test impulzusának időegységre eső megváltozása – ma – egyenlő a környezettől időegység alatt kapott impulzussal, amelyet a testre ható erőnek nevezünk (F).

$$\frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = m \cdot a = F$$

Newton III. törvénye

- **Az impulzusmegmaradás törvénye: inerciarendszerben zárt rendszer összes impulzusa állandó. Másként: az erőhatások párossával lépnek fel: ha az A testre a B test erőt fejt ki, akkor a B test az A testre azonos nagyságú, ellentétes irányú erőt fejt ki.**

Mi a fény?

- Elektromágneses hullám: az elektromos és mágneses terek egymást gerjesztő, egymásra merőleges, a térben tovaterjedő örvényei.

$$\sum_0 \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \dot{\Phi}$$

$$\sum_0 \mathbf{B} d\mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \dot{\Psi}$$

Hullámegyenlet

- A két törvényből hullámegyenlet származik. Ebből kiolvasható a terjedés sebessége:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Honnan nézve 3000000 km/s?

- Talán a fényforráshoz viszonyítva c a fény sebessége?

Megfigyelés: páros csillagok...

- Talán az észlelőhöz képest? Létezik-e ÉTER? (Michelson és Morley kísérletei)

Nem létezik éter, nincs abszolút tér.

A fény sebessége állandó

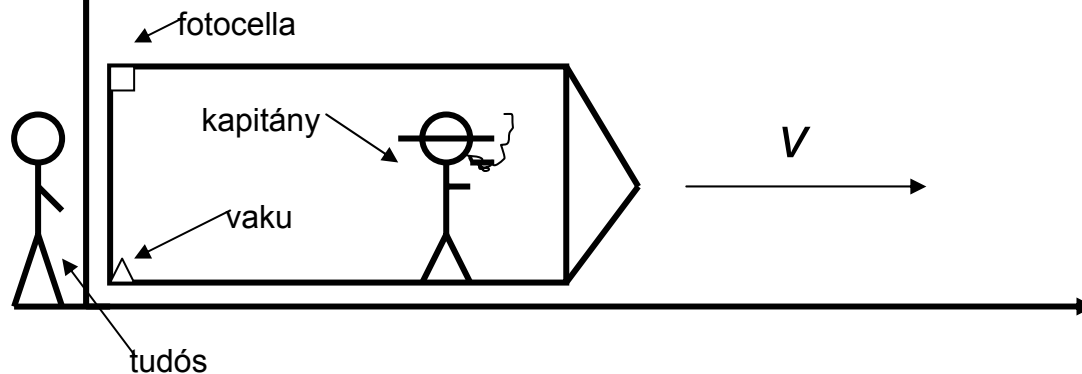
- A Maxwell-egyenletekből következik, hogy a fény terjedési sebessége minden tehetlenségi vonatkoztatási rendszerben (IR) azonos. Nem függ sem a fényforrás sebességétől, sem az észlelő sebességétől.

Fény az űrhajón

- Ha egy hosszú űrhajó 200 ezer km/s sebességgel halad (hosszánk képest), és a far-részből egy fénysugarat bocsátanak ki az orr-rész felé, akkor ennek a sebességét 300 ezer km/s-nak mérem, és nem 500 ezer km/s-nak.
- Ez azt jelenti, hogy az idő nem abszolút, és a mozgó órák nem járnak együtt az álló órákkal: $v_{oi} + v_{if} \neq v_{of}$

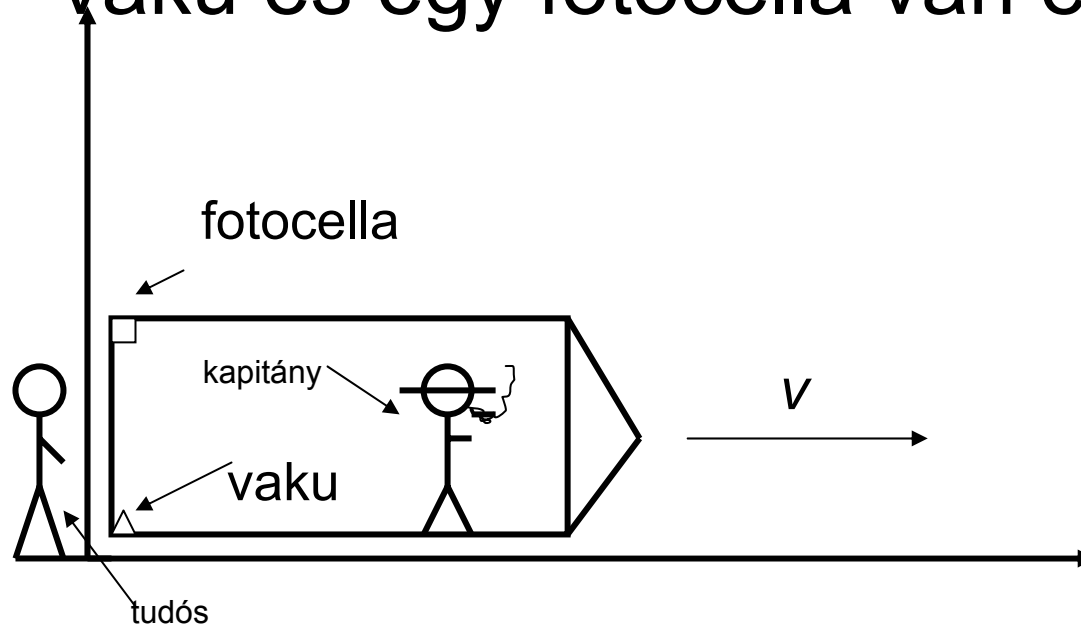
Alaphelyzet

- Az űrhajó (a kapitánnyal a fedélzetén) v sebességgel elhalad a tudós szobája mellett, pontosan amikor a kapitány és a tudós órája egyszerre 0-t mutat.



Technikai eszközök az űrhajón

- Az űrhajón a mozgás irányára merőlegesen egymással szemben egy vaku és egy fotocella van elhelyezve.



Kétféle idő

- A fény felvillanása és a fotocella jelzése közötti időt a tudós t -nek, az űrhajón utazó kapitány τ -nak méri. Az űrhajó a vonatkoztatási rendszerben megtesz vt utat. A fény a vonatkoztatási rendszerben ct utat, az űrhajóból nézve $c\tau$ utat tett meg.
- A fény az űrhajóban mérve és a tudós koordináta-rendszeréből nézve is c -vel halad. *(Ez a nehéz pont: ellentétes szemléletünkkel.)*

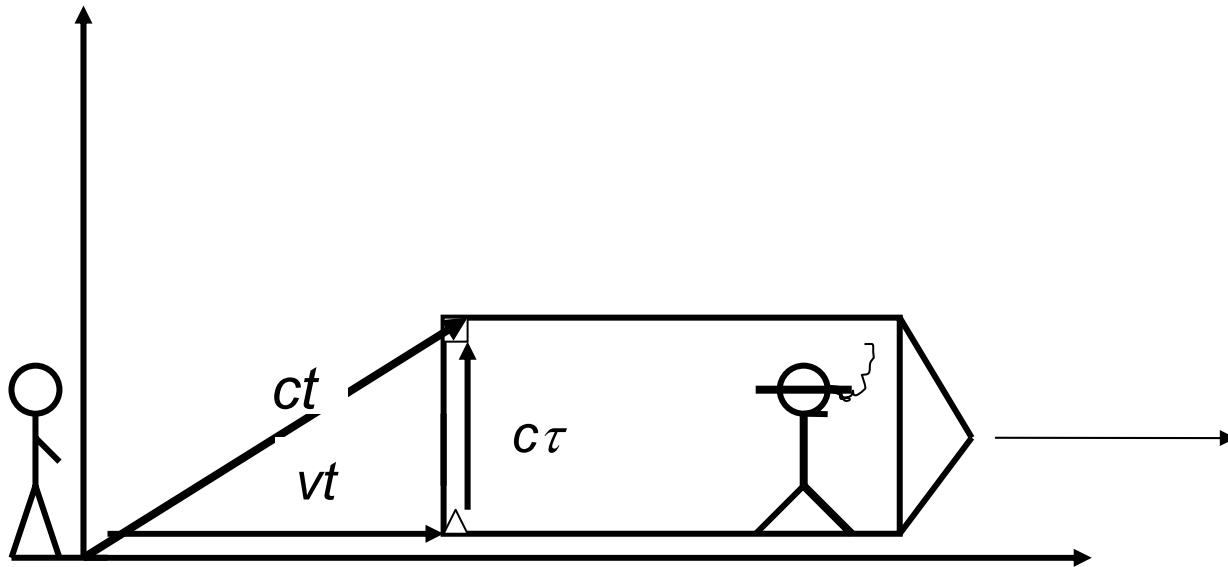
A speciális relativitáselmélet axiómái

- Két axióma:
 1. Az inerciarendszerek egyenenértékűek
 2. A fény sebessége minden inerciarendszerben (vákumban) azonos.

Az első axiómával kapcsolatban nincs szemléleti problémánk. A másodikkal kapcsolatban nem tehetjük fel azt a kérdést, hogy érthető-e? Ez az állítás nem érthetetlen és nem érthető: ez tény, bár el kell ismerni, hogy a szemlélettel ellentétes. El kell azonban fogadni, mert a Maxwell-törvények kényszerítő erővel hatnak.

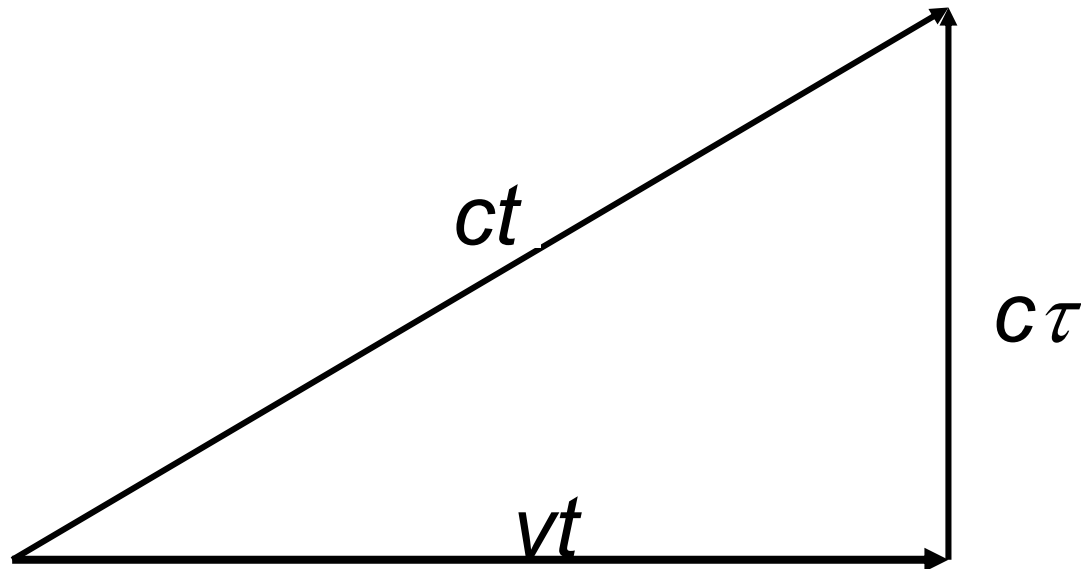
A lényeg...

- Mindez itt látszik.



Ez a legfontosabb!

- Emeljük ki a háromszöget!



Írjuk fel a Pithagorász-tételt

-

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (c\tau)^2$$

$$(c^2 - v^2)t^2 = c^2\tau^2$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot t^2 = \tau^2$$

Végül...

- A tudós vonatkoztatási rendszerében mért t „rendszeridő” és az űrhajó τ „sajátideje” közötti kapcsolat:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Egy példa számokkal

- Ha az űrhajó sebessége 240000 km/s , vagyis $0,8c$. Tegyük fel, hogy $t=1\text{s}$. Ekkor $\tau=0,6 \text{ s}$.
- Két esemény (a vaku villanása és a fotocella jelzése) között eltelt idő az űrhajóból nézve rövidebb, mint a tudós rendszerideje:
- **Sajátidő \leq rendszeridő**

Fényév

- MÉRJÜK az időt évben, a távolságot fényévben. 1 fényév az a távolság, amelyet a fény (vákuumban) 1 év alatt megtesz. Ekkor a fény sebessége:

$$c = 1 \frac{\text{fényév}}{\text{év}}$$

Fényméter

- Az idő új egysége: az az idő, amely alatt a fény vákumban 1 méter utat megtesz. A fény sebessége:

$$c = 1 \frac{\text{méter}}{\text{fényméter}}$$

Fontos észrevétel

- A fénysebességnél nagyobb sebesség nem lehetséges: egyetlen anyagi test sem mozoghat gyorsabban, mint a fény.
- Célszerű a sebességet a fénysebesség arányában kifejezni (az űrhajó sebessége $\beta=0,8$). Ekkor a fény sebessége 1. Ugyanezt kapjuk, az időt és a távolságot ugyanabban az egységben mérjük, pl.: méter, fényméter.

Fontos lesz a következő:

- Elemezzük a

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

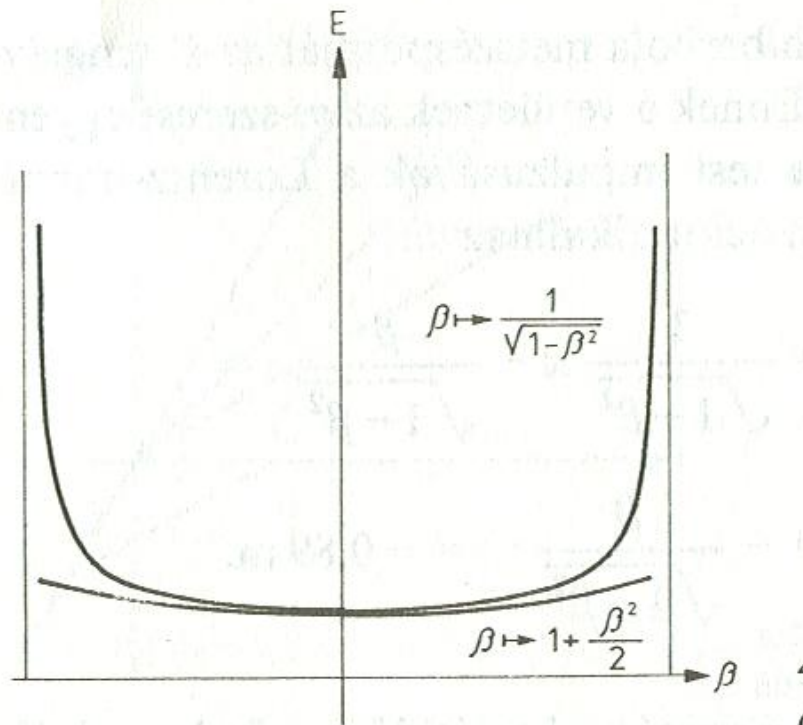
összefüggést.

Kiszámolható, hogy közelítőleg:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2$$

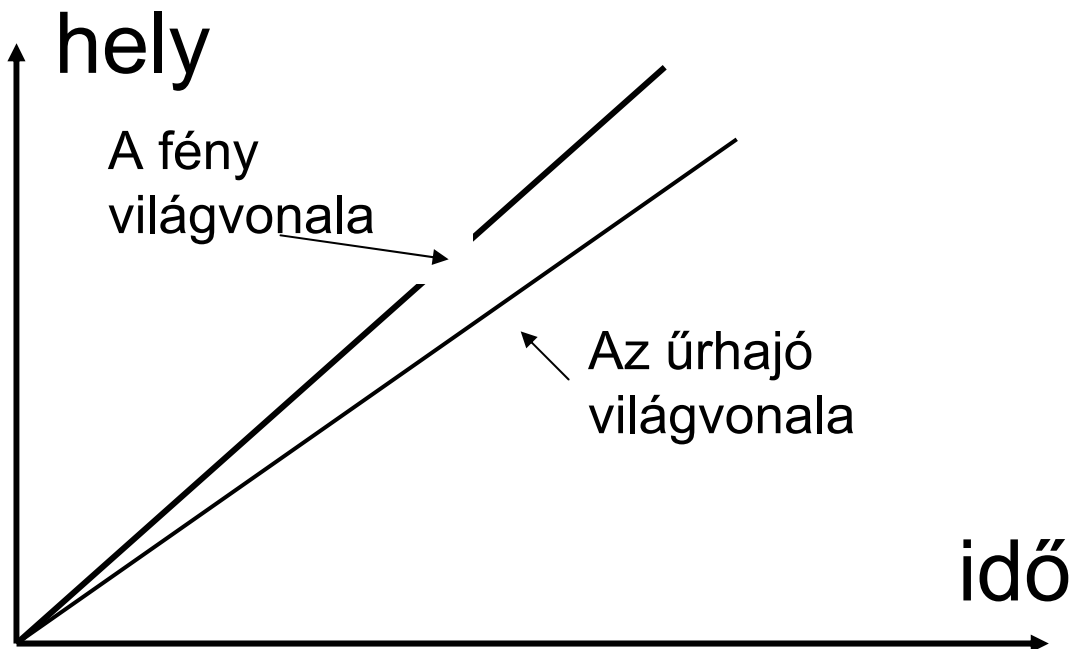
A két függvény

-



Tér-idő

- A fény világvonala 45° -os egyenes. Más grafikonok meredeksége kisebb.



Példa

- Az űrhajó szélessége 6 méter, sebessége 0,8 méter/fényméter. Ekkor a fény emissziója és elnyelődése között – az űrhajóból nézve, a kapitány óráján $\tau = 6$ fény-méter idő telik el. E két esemény között a rendszer origójában tartózkodó tudós $t = 10$ fényméter időszakot mér. Közben az űrhajó $x = 8$ méter utat tett meg.

Összefüggés t , x , τ között

- A Pithagorász-tétel alapján ($c = 1$)

$$x^2 + \tau^2 = t^2$$

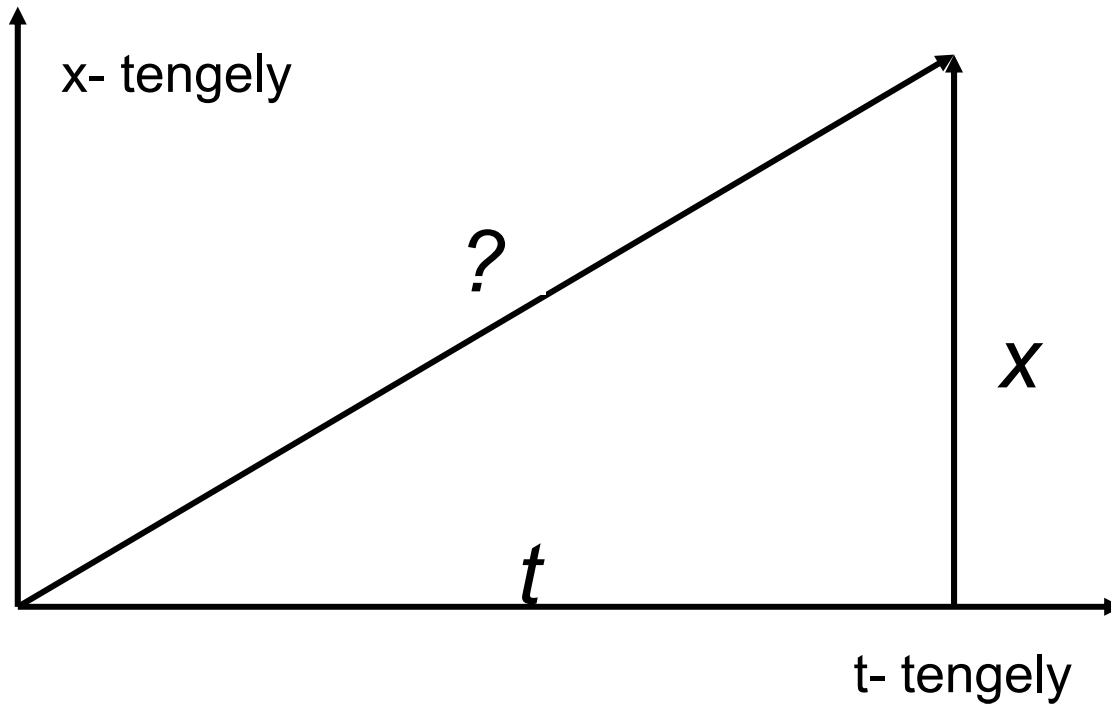
$$8^2 + 6^2 = 10^2$$

$$t^2 - x^2 = \tau^2$$

Ábrázoljuk tér-idő síkon

- A hely és időkoordinátákat egyaránt méterben mérjük. (Mérhetnénk mindkettőt évben, fényévben.) Az $x-t$ síkon a fény felvillanásának koordinátái: $(0, 0)$, a fotocella a elnyeli a fényt, ennek az eseménynek a koordinátái: $(10,8)$. Mindkét pont illeszkedik az űrhajó világvonalára.
- Milyen jelentést tulajdoníthatunk a $(0,0)$ és a $(10,8)$ pontokat összekötő szakasz hosszának?

Mekkora az átfogó?



$$t^2 + x^2 = ?$$

Ismerjük a jó választ...(honnan is?)

- Emeljük négyzetre a két koordinátát (a rendszerben mért időt és távolságot)! Kivonjuk (nem összeadjuk, mint az igazi Pithagorász-tételben!) t^2 -ből x^2 -et,

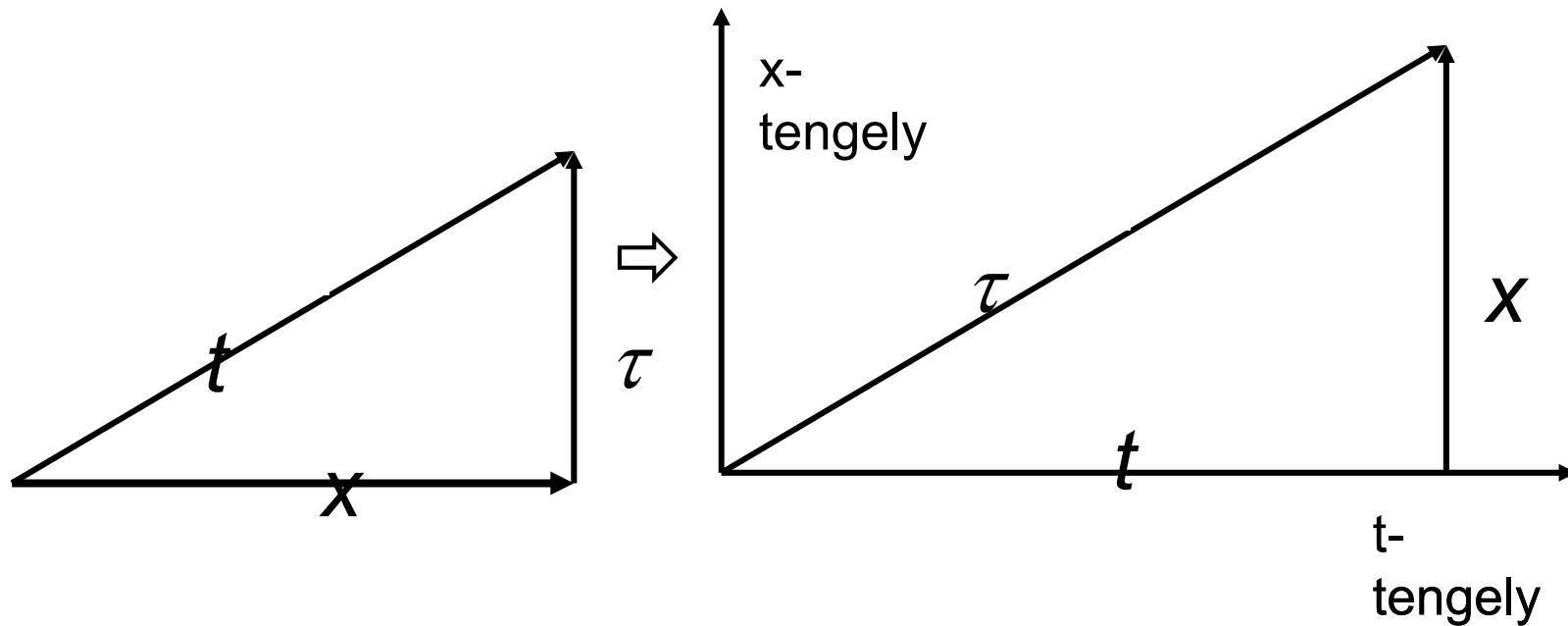
$$t^2 - x^2 = \tau^2$$

A háromszög átfogója a sajátidő!

Megjegyzés: $t^2 + (\sqrt{-1} \cdot x)^2 = \tau^2$

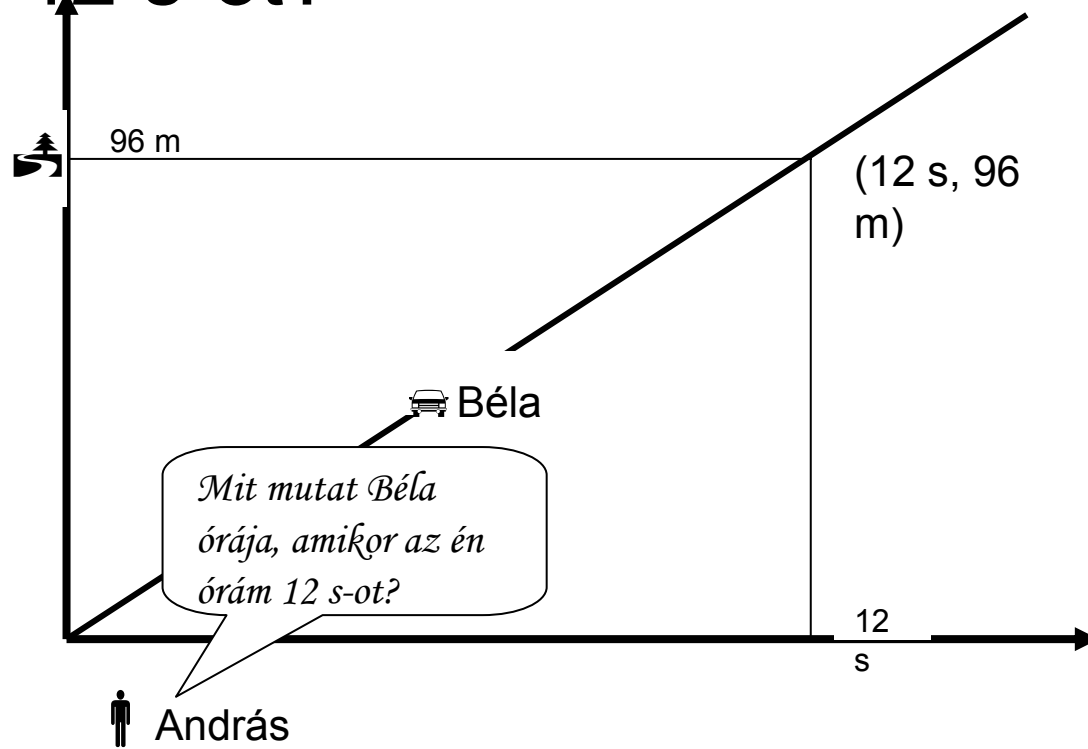
Figyelem!

- Két háromszög szerepel:



Ez volt a nagy kérdés:

- „Mit mutat Béla órája, amikor az én óráim 12 s-ot?”



Régi kérdésre a válasz...

- $t=12 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^9 \text{ fényméter}$, $x= 96 \text{ méter}$

$$t^2 - x^2 = (3,6 \cdot 10^9)^2 - 96^2 \approx (3,6 \cdot 10^9)^2$$

Túlságosan kicsi a sebesség, ezért nincs érzékelhető különbség a rendszeridő és a sajátidő között.

Ha nagy a sebesség:

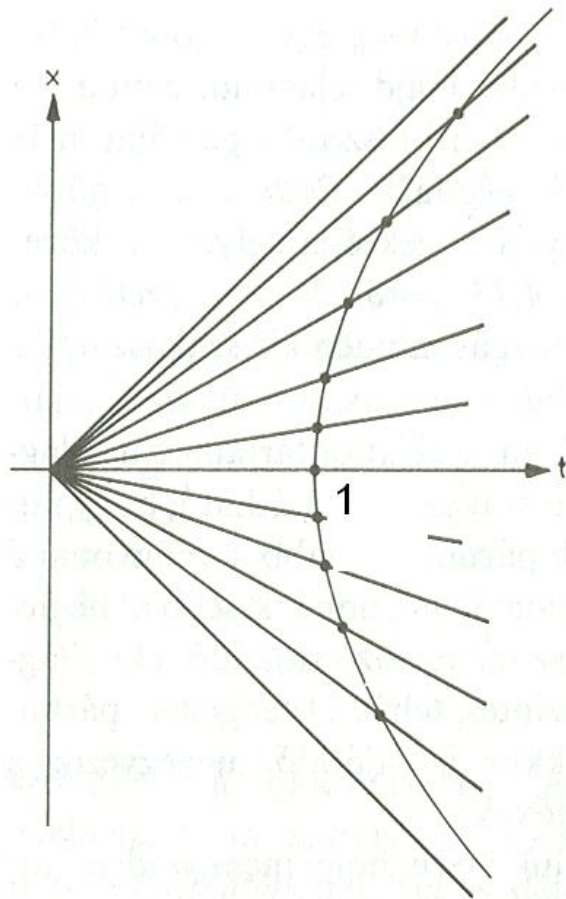
- Ha azonban nagy a sebesség: $0,8$ méter/fényméter, a rendszer origójában tartózkodó tudós $t=10$ fényméter időszakot mér, a kapitány órája $\tau=6$ fényméter időt mutat.

A fény sajátideje nulla

- A fény elindul a Napról, 8 perc alatt a Földre ér. A sajátideje nulla, igazán tiszavirág életű!

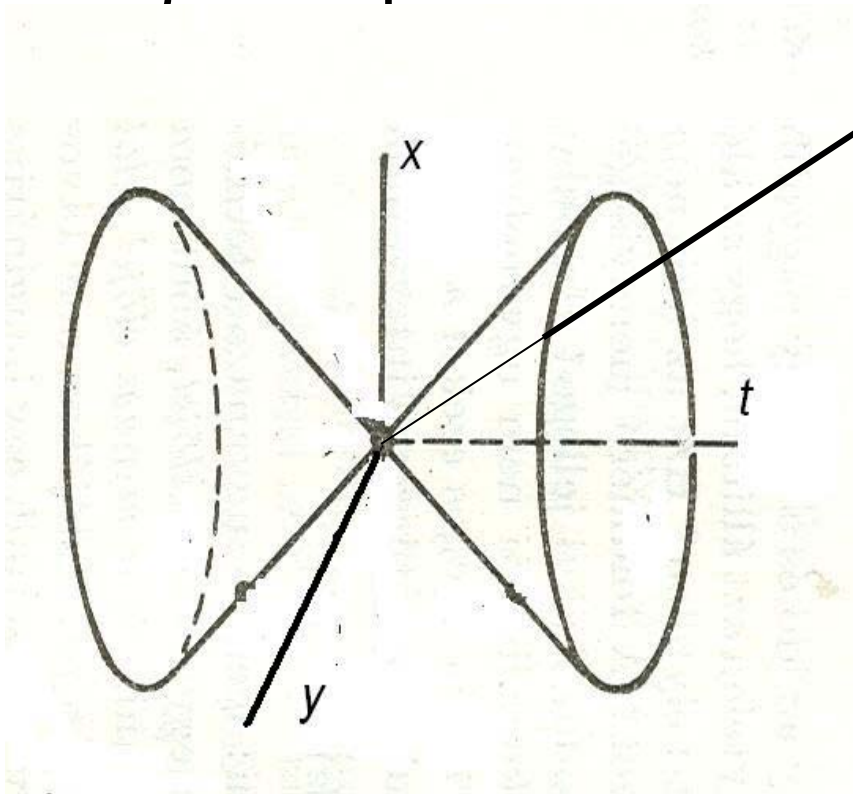
$$t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \tau = 0$$

Azonos sajátidők

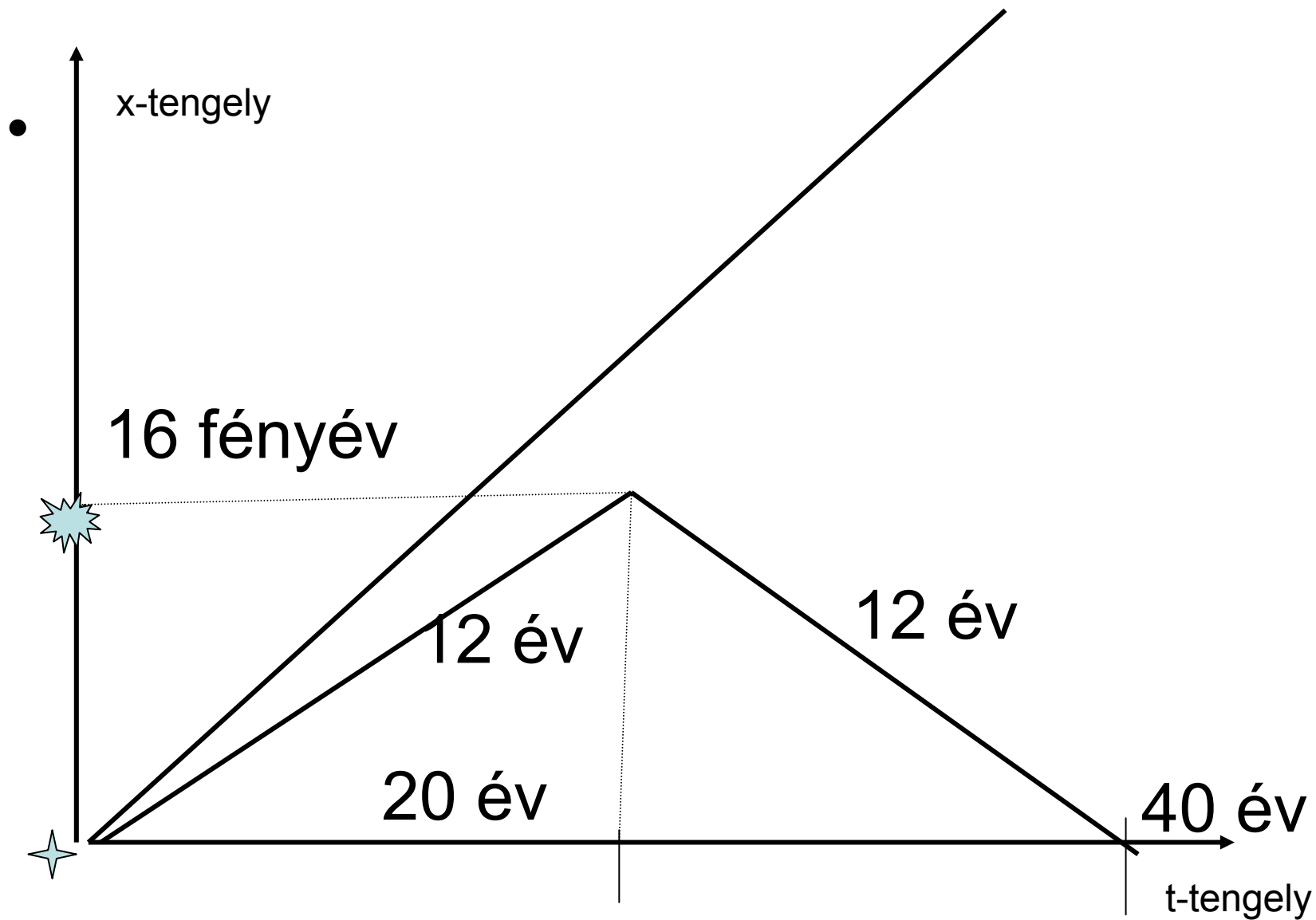


Fénykúp

- Az origón keresztülhaladó mozgások grafikonja a kúpban halad.



Ikrek



A történet

- Két testvér (ikrek) közül az egyik űrhajóra száll, hogy megnézze a 16 fényévre található kis csillagot. A testvére itthon marad. Az űrhajó sebessége $0,8$ fényév/év. Az itthon maradt testvér megállapítja, hogy az űrhajó 20 évig távolodik, majd 20 évig közeledik. Tehát 40 évvel öregebb, amikor a testvére hazaért. Az űrhajóban utazó testvér saját óráján regisztrálja, hogy 12 évig távolodik, majd 12 évig közeledik. Tehát 24 évvel lett öregebb. A testvére 40 évvel.

Sebességösszeadás

- Ezt most levezetés nélkül. A számításoknak könnyen utánanézhethetünk.

$$\frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + \frac{v_{AB} \cdot v_{BC}}{c^2}} = v_{AC}$$

Távolságmérés

- Az A rendszerrel mozgó rúd elhalad az „O” rendszer origójában tartózkodó megfigyelő mellett. Két esemény: a rúd eleje elhalad, a rúd vége elhalad. Az „O”-ban τ időt mérnek, „A”-ban t -t. „O”: az L hosszúságú rúd τ idő alatt halad el O mellett, „A”: az „O” rendszer origója t idő alatt halad el az L_0 hosszú rúd mellett.

Lorentz-kontrakció

$$\beta = \frac{L_0}{t} = \frac{L}{\tau}$$

$$L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L$$

(Ezért volt indokolt kérdés, hogy mit jelent az, hogy merev rúddal mérjük a távolságot.)

Tömegmérés

- Térjünk vissza a tömeg mérésére. A tömeget úgy mérjük, ahogyan már megbeszéljük (25. és 26. dia). A következő kérdés az volt, hogy függ-e a tömeg attól, hogy melyik inerciarendszerben mérjük. Akkor azt, kaptuk, hogy a tömeg nem függ az IR választástól, de „felhasználtuk”, hogy a sebesség lineárisan összeadódik.

Mit értsünk impulzuson?

- Követelmény: ha egy nagy sebességű test ütközik egy kis sebességű testtel, akkor az impulzusváltozások egyenlők legyenek, és ellentétes irányúak. Ebből a feltételből azt kapjuk, hogy a

*relativisztikus impulzus = tömeg x
egységnyi sajátidőre jutó elmozdulás:*

$$I = m \frac{\Delta r}{\Delta \tau}$$

Másként:

Kis átalakítással:

$$I = m \frac{\Delta r}{\Delta \tau} = m \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = m \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \frac{\Delta r}{\Delta t} = m_* v$$

Olvassuk össze a három tényező közül az első kettőt (nagy trükk): ezt nevezzük relativisztikus tömegnek.

A tömeg nem abszolút

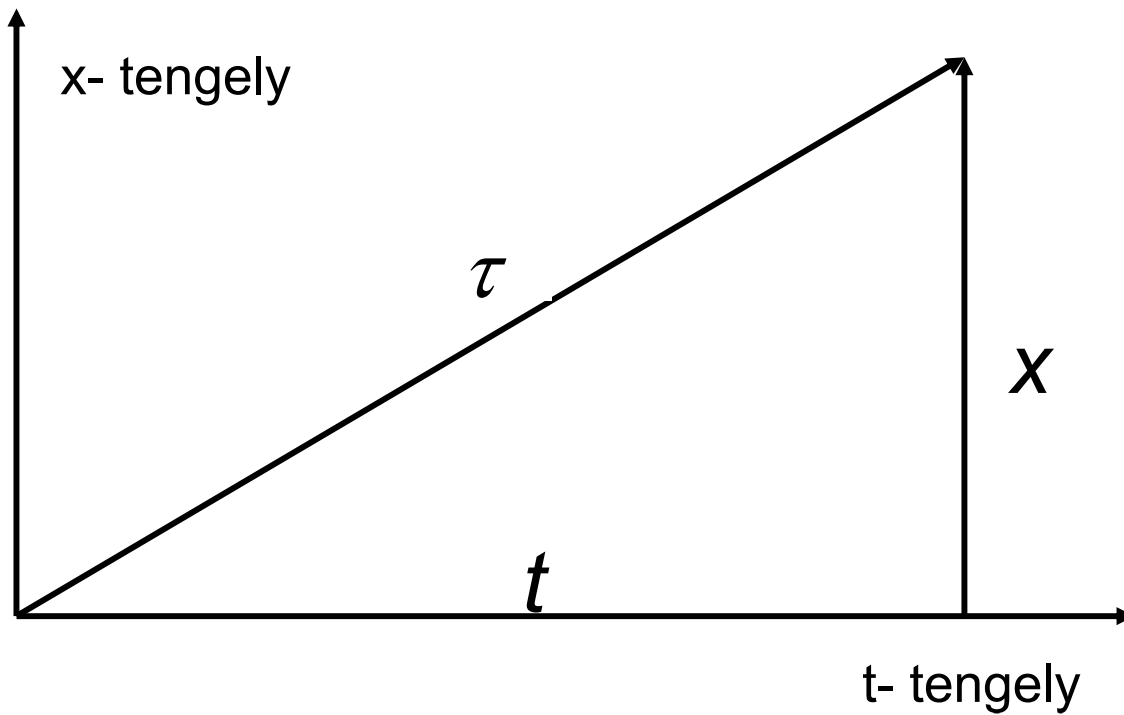
$$m_* = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m a test *nyugalmi tömege*, abszolút.

m_* *relativisztikus tömeg* nem abszolút, függ a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebességtől, hiszen az m nyugalmi tömeget sebességtől függő mennyiséggel szoroztuk meg.

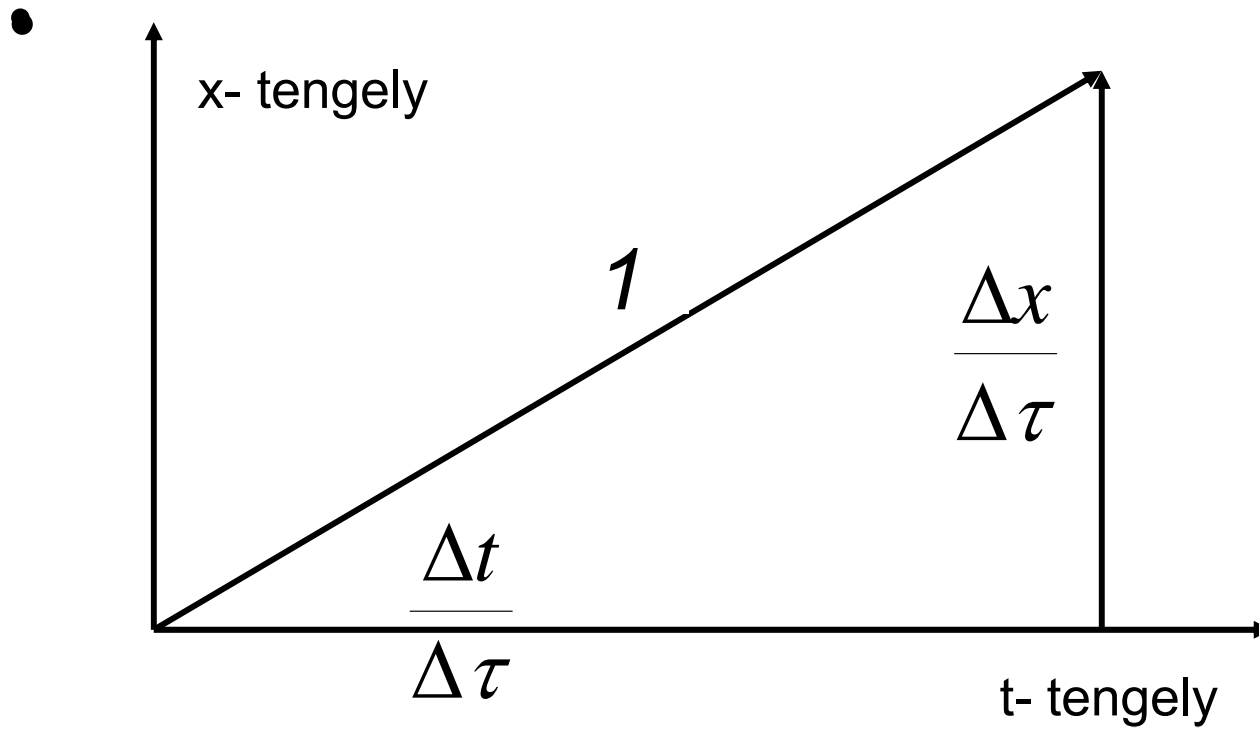
Fontos eredmény

-

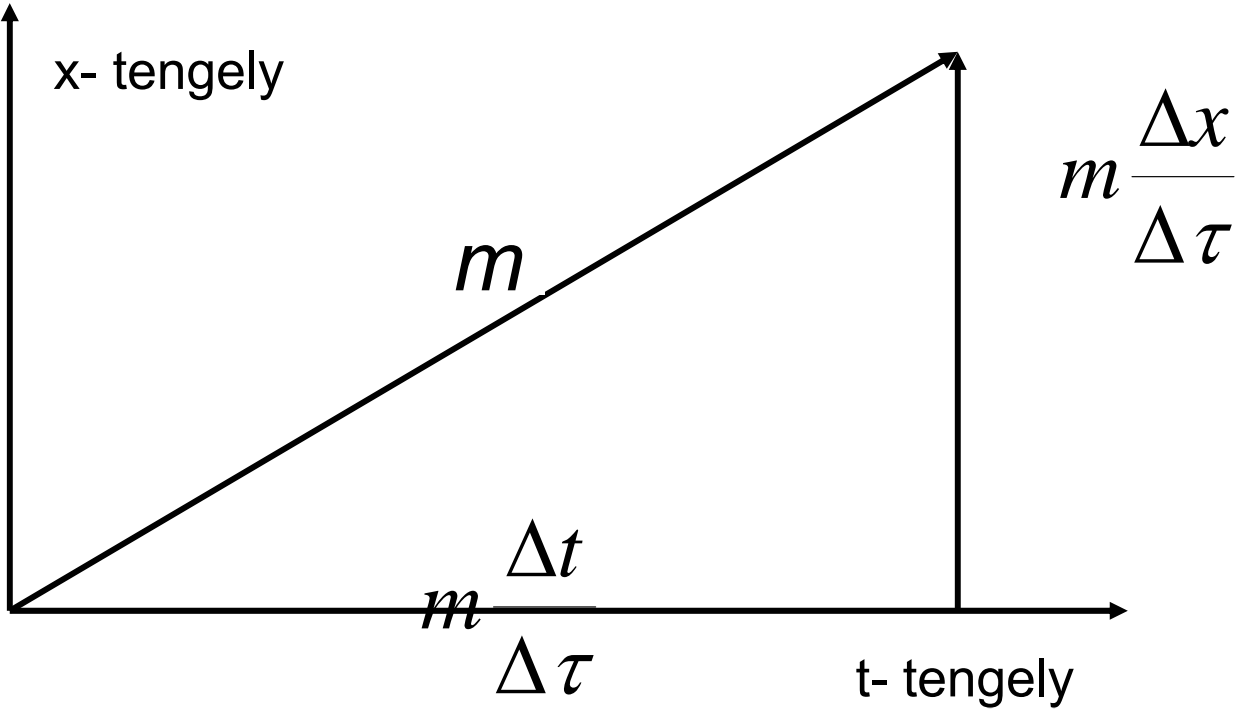


$$t^2 - x^2 = \tau^2$$

Egyszerű művelet



•

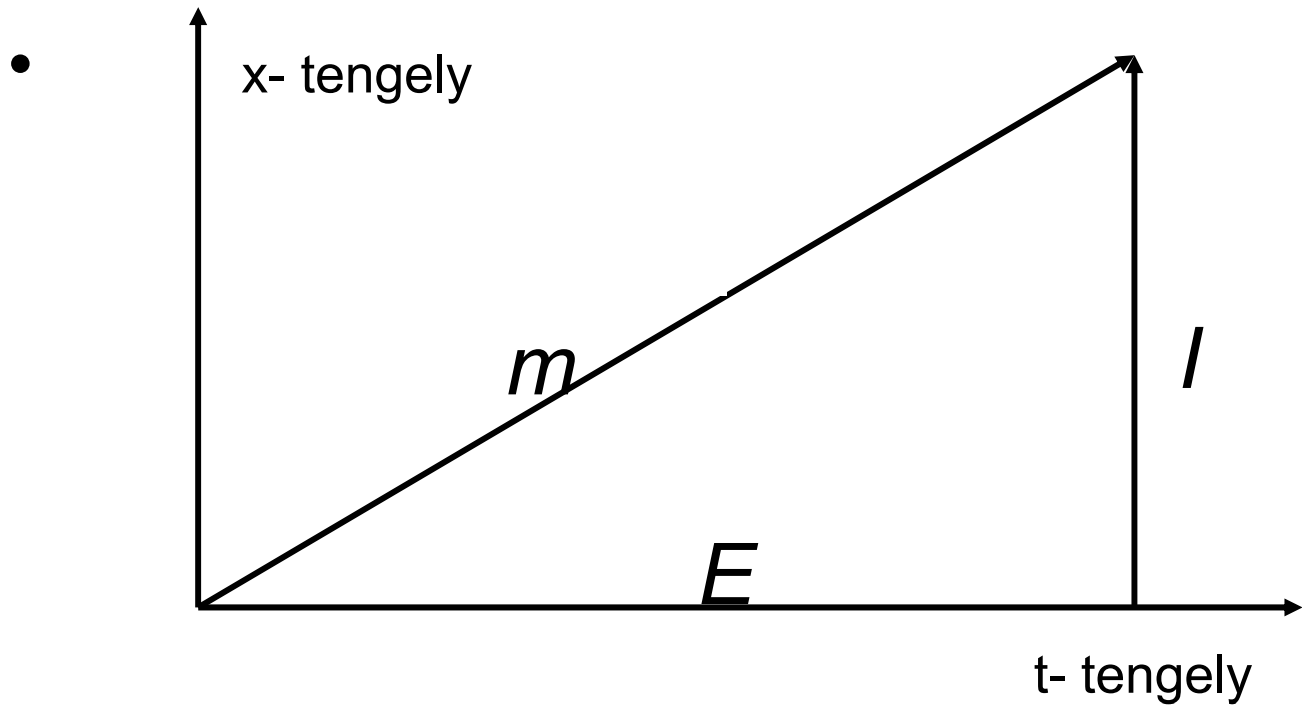


Fontos összefüggés

- A háromszög átfogója a nyugalmi tömeg, függőleges oldala az impulzus, a vízszintes oldalt jelöljük E -vel. Helyesen, mert közelítőleg mc^2 (nyugalmi energia) és a hagyományos mozgási energia összege:

$$E = m \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = m \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx m + m \frac{\beta^2}{2}$$

$$E = m \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m \cdot c^2 + m \frac{v^2}{2}$$



$$E^2 - I^2 = m^2$$

Nyugalmi tömeg

Ha $l=0$, vagyis a test áll, akkor $E=mc^2$, az energia arányos az m nyugalmi tömeggel. (E nő $\Rightarrow m$ nő.)

A nyugalmi tömeg abszolút, mind a sajátidő.
A tömeg két tulajdonsága szétválik: a nyugalmi tömeg abszolút, de nem megmaradó, a mozgási tömeg relatív, de megmaradó.

Tér-idő-anyag

- Helykoordináta \Rightarrow impulzus
- Rendszeridő \Rightarrow energia
- Sajátidő \Rightarrow nyugalmi tömeg

A legfontosabb mennyiségek közötti kapcsolattal foglalkoztunk, nem foglalkoztunk a dinamikai törvényekkel: Newton II. törvényével, munkatétellel.

De már nem okozna meglepetést...

- A diasorozat középiskolások számára Egerben (Neumann Szakközépiskola) 2005 március 22-én tartott előadáshoz készült.
- Javasolt irodalom:
Baranyi Károly: A fizikai gondolkodás iskolája I-III. Akadémiai Kiadó, 1992.
Taylor – Wheeler: Téridő – fizika, Gondolat 1974